* **GRUPPO**

DEFINIZIONE: Sia e sia tale che

si dice GRUPPO

* **GRUPPO ABELIANO**

DEFINIZIONE: Sia (G, \*) un gruppo tale che allora G si dice COMMUTATIVO o ABELIANO. (questa non è una cosa richiesta per la definizione di gruppo)

OSSERVAZIONE: Sia (G, \*) gruppo allora,

1. L’elemento neutro è unico
2. L’inverso di ogni elemento è unico

DIMOSTRAZIONE: 1) Se e, f sono elementi neutri, allora abbiamo:

Dalla a)

b)Sia e siano g1, g2 suoi inversi

Quindi l’inverso è unico

NOTAZIONE: Se (G, \*) è gruppo e si denoterà con l’inverso di g.

PROPOSIZIONE: Sia (G, \*) gruppo. Allora :

DIMOSTRAZIONE:

1. Si consideri
2. Osservo che

ES. (gli interi con la somma), sono gruppi abeliani. I naturali con la somma NON sono un gruppo perché non gode di una delle 3 proprietà, l’inverso.

ES. (N, +) non è gruppo perché se , l’elemento b tale che a+b=0 è necessario che b=-a, ma -aN.

ES. è un gruppo abeliano.

ES. non è un gruppo perché manca l’inverso, per esempio 0 non ammette inverso non è gruppo perché se a > 1, l’inverso è

ES. (Q,\*) non è un gruppo perché 0 non ammette inverso, ma è gruppo, infatti se il suo inverso è

ES. sono tutti gruppi abeliani

ES. non è gruppo poiché la matrice nulla non ammette inverso

ES. è un GRUPPO NON ABELIANO. vuol dire “matrice invertibile”

ES. è gruppo infatti , la “+” è interna, la “+” è associativa,

infatti

* Possiamo identificare l’elemento neutro con [0] perché
* Se si consideri
* è gruppo abeliano finito

ES. non è un gruppo perché [0] non ha inverso. Se esistesse

ES. Quando è gruppo?

ma [1] possiede [1] come inverso 🡪 è gruppo abeliano finito

ma [2] possiede [2] come inverso 🡪 è gruppo abeliano finito

ma [3] ha [3] come inverso, ma [2] NON ha inverso 🡪 NON è gruppo.

PROPOSIZIONE: è gruppo n è primo

DIMOSTRAZIONE: è gruppo ammette inverso

ammette soluzione

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ABELIANI | NON ABELIANI |
| GRUPPI FINITI | , , |  |
| GRUPPI INFINITI | , |  |

ES.

PROPOSIZIONE: è un gruppo

LEMMA: Se bigettiva, allora è bigettiva

DIMOSTRAZIONE: Osserva che, se sono bigettive,

Osserva che

è invertibile 🡪 è BIGETTIVA

DIMOSTRAZIONE: perché è bigettiva.

Inoltre per il lemma precedente. Ricordiamo che la composizione di funzioni è associativa. Infatti

Inoltre siccome f è bigettiva, essa è invertibile, cioè

Quindi è un gruppo (gruppo delle funzioni bigettive)

RICORDA: Se Sn si dice GRUPPO SIMMETRICO. Di ordine n. inoltre

che è gruppo abeliano

che è gruppo abeliano

Si considerino

S3 NON è abeliano

OSSERVAZIONE: non è gruppo abeliano.

NOTAZIONE: non sono numeri naturali ma vestiti ai concetti

Se

1 1

2 2

… …

n n

* **NOTAZIONE MATRICIALE**

NOTAZIONE MATRICIALE:

ES.

OSS:

OSS: |X| = 4,

1 1

2 2

3 3

4 4

1 1

2 2

3 3

4 4

OSS: Se è in notazione matriciale, si ottiene invertendo le righe di e ordinando le nuove colonne:

ES.

OSS:

si dicono CICLI DISGIUNTI di

Un ciclo di Sn è una permutazione su un certo sottoinsieme si X

Ogni è prodotto di cicli disgiunti.

NOTAZIONE:

Questa è la decomposizione di in cicli disgiunti, in particolare

OSS: Ogni ciclo è del tipo 🡪

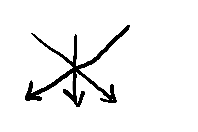
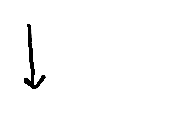
* **CICLO**

DEFINIZIONE: Un ciclo è una scrittura del tipo . Quindi

ESEMPIO:

ESEMPIO: Sia

ESEMPIO: Sia

 2 3 5 4

2 4 5 3

PROPOSIZIONE: Se allora

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che

quindi gli uni sono gli insiemi degli altri.

ESERCIZIO: Trovare l’inversa di

Ora scriviamolo in cicli disgiunti:

L’inverso del prodotto di un gruppo è

ESEMPIO: Calcolare l’inversa di

* **SOTTOGRUPPO**

DEFINIZIONE: Sia (G, \*) gruppo, è gruppo, (S,\*) si dice SOTTOGRUPPO di (G,\*) e scriveremo

ES.

ES. perché (n,+) NON è GRUPPO!

ES.

ES. Sia

(S, \*) è gruppo perché:

* + ;
  + è interna a S;
  + è associativa;
  + è elemento neutro;
  + Ogni elemento di S è invertibile;

ES. Si consideri l’insieme per un certo “n” fissato.

è gruppo, infatti:

* + ;
  + Se ;
  + “+” è associativa perché la “+” degli interi è associativa;
  + 0 è elemento neutro;
  + Se Si consideri ;

Siccome

Sono pochissimi i gruppi di cui si possono conoscere tutti i sottogruppi.

PROPOSIZIONE: Tutti e soli i sottogruppi di

DIMOSTRAZIONE: Sia Allora Si consideri . Se perché H è gruppo. Quindi Quindi per il PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO, possiede un elemento minimale che denoteremo “n”. Proviamo che

Questa è una uguaglianza tra due insiemi, dobbiamo provare che .

Sia

Siccome .

Sia dividendolo per h

* **CENTRO**

DEFINIZIONE: Sia (G,\*) gruppo, . Z(G) è detto CENTRO di G.

PROPOSIZIONE: Se (G,\*) è gruppo, (Z(G),\*)(G,\*)

DIMOSTRAZIONE: Osserva che Inoltre perché

La “\*” è associativa perché è associativa la “\*” di G.

Proviamo che “\*” è interna. Siano Bisogna provare che Osserviamo che

Divisione da provare che, dato allora e cioè

Se

OSSERVAZIONE: Se , l’insieme è CERTAMENTE un insieme FINITO (in quanot sottoinsieme di Sn che è finito). Questo significa che esisterà un certo

* **ORDINE**

DEFINIZIONE: il più piccolo m tale che si dirà ORDINE di

PROPOSIZIONE: Se come prodotto di cicli disgiunti, allora l’ordine di

.

ESEMPIO: Sia

La lunghezza del ciclo ci dà l’ordine.

Preso un ciclo k è il più piccolo intero tale che

Riconsidero e mi scrivo di nuovo l’insieme che denoterò

OSSERVAZIONE:

* **GRUPPO CICLICO GENERATO DA**

DEFINIZIONE: è detto GRUPPO CICLICO GENERATO DA

ESERCIZIO: Sia Descrivere il gruppo ciclico generato da

RISPOSTA: Osserviamo che ha 6 elementi

Sia (G, \*) gruppo e Si consideri la relazione su detto laterale destro di g)

PROPOSIZIONE: R è relazione d’equivalenza

DIMOSTRAZIONE:

* RIFLESSIVA: Sia
* SIMMETRICA: Siano
* TRANSITIVA: Siano

Siccome R è di equivalenza, se G è gruppo finito e perché una relazione d’equivalenza genera una partizione di G.

PROPOSIZIONE: Se

DIMOSTRAZIONE: Bisogna costruire una bigezione tra g1H e g2H. A tal proposito si consideri

è INGETTIVA. Se

è SURGETTIVA. Sia

OSSERVAZIONE:

OSSERVAZIONE: Sia

TEOREMA DI LAGRANGE: Se G gruppo finito e

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che (dove l’unione è disgiunta)🡪

ESEMPIO: si consideri S3 e il sottoinsieme

H è sottogruppo di S3? NO perché se H fosse sottogruppo di S3, per il th di Lagrange, |H|\|S3| e cioè 4\6, assurdo.

ESEMPIO: Occhio!!! Il Th di Lagrange è solo una condizione NECESSARIA, non sufficiente dei sottogruppi. Infatti è tale che |H|\|S3|ma perché H non contiene (1 2) (1 3)= (1 3 2)